Apelidos: EXAME RESOLTO Nome: ....

EXAME DE MECÁNICA CLÁSICA I

Curso 2020-21 *18 de Xaneiro de 2021*

1. Unha partícula puntual de masa m móvese ao longo do eixo x cunha enerxía potencial

$$V(x) = \frac{c\,x}{x^2 + a^2} \quad \text{onde a} > 0,\ \text{c} > 0 \text{ son constantes.} \tag{1}$$

   (a) Representa $V(x)$ gráficamente.

   (b) Obtén a frecuencia das pequenas oscilacións ao redor do punto de equilibrio estable x_0.

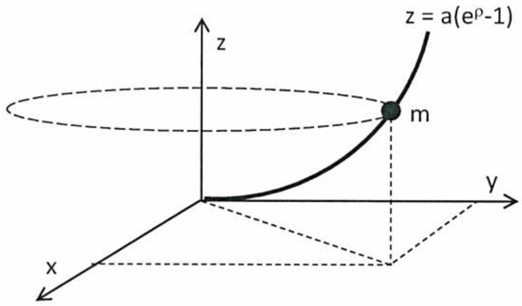
   Se a partícula parte do punto de equilibrio estable $x = x_0$ con velocidade v_0:

   (c) Calcula o valor mínimo $v_{\min}$ de v_0 para que a masa chegue dende $x = x_0$ a $x \to \infty$.

   (d) Nestas condicións calcula o valor da velocidade v_∞ en $x \to \infty$.

---

2. Unha masa m esvara sen rozamento ensartada nun arame inextensible e de masa desprezable que ten a forma $z = a\ (e^\rho - 1)$, sendo a unha constante positiva e ρ a distancia de cada punto do arame ao eixo z. O arame, que ten o extremo inferior na orixe de coordenadas (ver figura), pode xirar libremente ao redor do eixo z. Considerar que actúa a forza da gravidade.



   (a) Determina a función de Lagrange do sistema.

   (b) Identifica as simetrías e as cantidades conservadas.

   (c) Polo método do potencial efectivo describe cualitativamente o movemento.

3. Un bloque de masa m está unido a un plano inclinado de masa M e ángulo α por un resorte de constante k, como amosa a figura. Tanto o plano como o bloque poden moverse sen rozamento e están sometidos á forza da gravidade.

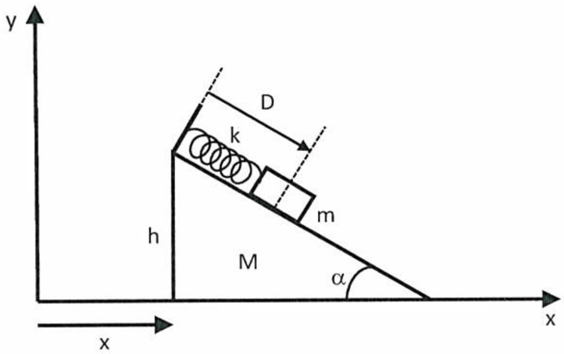
   (a) Escribe a enerxía cinética e potencial do sistema.

   (b) Atopa as matrices m_{jk} e A_{jk} da ecuación secular do sistema de osciladores harmónicos acoplados.

   (c) Calcula as frecuencias propias do sistema.

   (d) Determina os modos normais de oscilación no caso $\alpha = 0$. Debuxa os modos de maneira esquemática e explica como se move o sistema.

   (e) Discute o caso $\alpha = \pi/2$



---

4. Un medio material ten unha relación de dispersión data pola ecuación:

$$\omega^2 = v^2 k^2 (1 + sL^2 k^2) \tag{2}$$

onde k é o número de ondas, ω a frecuencia e v, s e L son constantes.

   (a) Escribe a velocidade de fase v_f e velocidade de grupo v_g no medio.

   (b) Estudia a dispersión no medio como función do parámetro s indicando se é un medio dispersivo ou non, así como que tipo de dispersión ten lugar no medio.

   (c) Escribe as dimensións de L razoando a resposta e dá unha interpretación física de L

① $V(x) = \dfrac{cx}{x^2+a^2}$ $a>0$, $c>0$

a) * raices: $V(x)=0 \Rightarrow x=0$, $x=\pm\infty$

* Max., min., ptos inflexión.

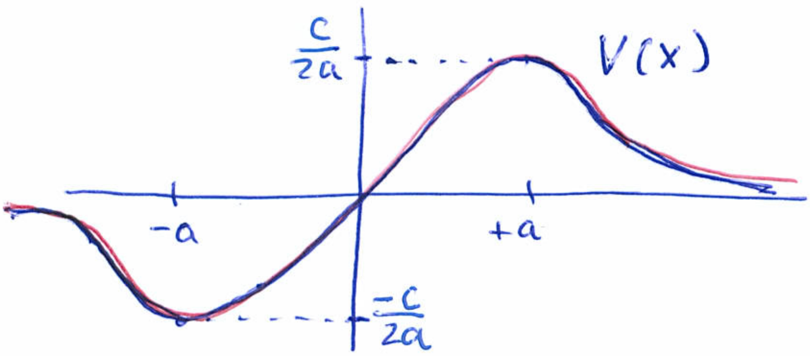
$\rightarrow \dfrac{dV}{dx} = \dfrac{c(x^2+a^2)-2cx^2}{(x^2+a^2)^2} = \dfrac{c(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2}$

$\dfrac{dV}{dx}=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm a}$

$\rightarrow \dfrac{d^2V}{dx^2} = \dfrac{-2cx(x^2+a^2)^2 - c(a^2-x^2)2x\,2(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^4}$

En $x=a \Rightarrow V''(a) = \dfrac{-2ca\,4a^4}{16a^4} = -\dfrac{ac}{2} < 0$ máximo

En $x=-a \Rightarrow V''(-a) = \dfrac{+2ca\,4a^4}{16a^4} = \dfrac{ac}{2} > 0$ mínimo



$V(a) = \dfrac{c}{2a}$

$V(-a) = \dfrac{-c}{2a}$

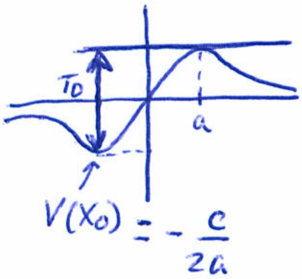
b) $x_0 = -a$ é un punto de equilibrio estable xa que $F(x_0)=0$ e $\left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} < 0$.

A frecuencia de pequenas oscilacións é:

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} = \boxed{\sqrt{\frac{ac}{2m}}}$$

c) Velocidade mínima [en $x_0 = -a$] para chegar a $+\infty$

A partícula necesitaría unha enerxía cinética T_0 que lle permita "salvar" a diferencia de enerxía potencial



Enerxía de escape $= V(a) = \frac{c}{2a}$

$$T_0 = \frac{c}{2a} - \left(\frac{-c}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_0^{min} = \sqrt{\frac{2c}{am}}}$$

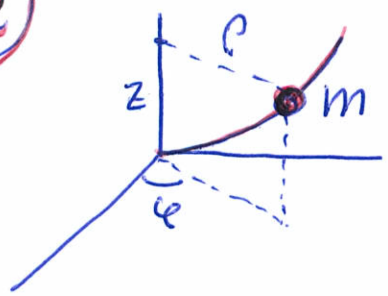
d) Velocidade no infinito: Calcularei a velocidade mínima que ten no infinito.

$$T_\infty = E_{escape} - V(\infty) = \frac{c}{2a} - 0$$

$$T_\infty = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \Rightarrow \boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{c}{am}}}$$

* verifica $v_\infty = \frac{v_0^{min}}{\sqrt{2}}$

②



ligadura $z = a(e^{\rho}-1)$

a) * sistema con <u>2 graos de liberdade</u>. En coord. cilíndricas ρ, φ, z escollo ρ e φ como <u>coordenadas xeneralizadas</u>.

→ Ecuacións de transformación de $x, y, z \to \rho, \varphi, z$.

$$x = \rho\cos\varphi \;\longrightarrow\; \dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\,\mathrm{sen}\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\varphi \;\longrightarrow\; \dot{y} = \dot{\rho}\,\mathrm{sen}\varphi + \rho\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$z = a(e^{\rho}-1)\ (\text{ligadura}) \;\longrightarrow\; \dot{z} = a\dot{\rho}e^{\rho}$$

$$\to T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+a^2\dot{\rho}^2e^{2\rho})$$

$$= \frac{1}{2}m(1+a^2e^{2\rho})\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2$$

$$\to V = mgz = mga(e^{\rho}-1).$$

$$\to \boxed{L = T - V = \frac{1}{2}m(1+a^2e^{2\rho})\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2 - mga(e^{\rho}-1)}$$

b) → $L = L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) \Rightarrow \varphi$ cíclica $\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\right)$ e $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\ \text{constante}}$$ simetría rotacional

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{H = cte.}$$ simetría temporal.

Ademais ecs. de transf. independentes do tempo $\Rightarrow$ <u>$E = H$</u>

$\ast$ Ecs. do movemento (non se pedía no exame).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \cancel{m}\, 2\cancel{\rho}\dot\rho\dot\varphi + \cancel{m}\rho^{\cancel{2}}\ddot\varphi = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot\varphi = -2\frac{\dot\rho}{\rho}\dot\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\right) = \frac{\partial L}{\partial \rho} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot\rho} &= m(1+a^2e^{2\rho})\dot\rho \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} &= \frac{1}{\cancel{2}}ma^2\dot\rho^2\cancel{2}e^{2\rho} + m\dot\varphi^2\rho - mgae^\rho \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}a^2 2e^{2\rho}\dot\rho^2 + \cancel{m}(1+a^2e^{2\rho})\ddot\rho =$$

$$= \cancel{m}a^2\dot\rho^2e^{2\rho} + \cancel{m}\dot\varphi^2\rho - \cancel{m}gae^\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+a^2e^{2\rho})\ddot\rho = -a^2\dot\rho^2e^{2\rho} - gae^\rho + \rho\dot\varphi^2}$$

c) Como $H = E =$ constante

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(1+a^2e^{2\rho})\dot\rho^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot\varphi^2 + mga(e^\rho - 1)$$

$\dot\varphi$ pódese pór en función de ρ a través da constante $p_\varphi \Rightarrow \boxed{\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}}$.

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m(1+a^2e^{2\rho})\dot\rho^2}_{\text{Enerxía cinética da coordenada } \rho} + \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{\rho^2}\frac{p_\varphi^2}{m^{\cancel{2}}\rho^{\cancel{4}2}} + mga(e^\rho - 1)}_{\text{Enerxía potencial da coordenada } \rho \text{ efectiva}}$$

$$\boxed{V_{ef}(\rho) = \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + mga\left(e^\rho - 1\right)}$$

Representación gráfica para estudar o movemento utilizando a condición $E \geq V_{ef}(\rho)$.

$\rho \to 0 \Rightarrow V_{ef} \to \infty$

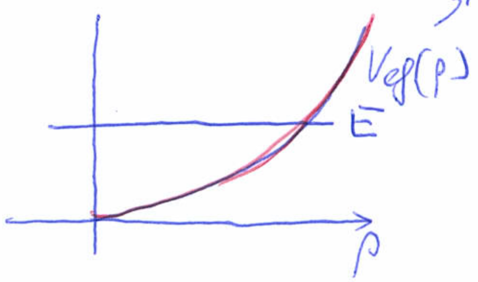
$\rho \to \infty \Rightarrow V_{ef} \to \infty$

Max. e min.: $$\frac{dV_{ef}}{d\rho} = -\frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} + mga\, e^\rho$$

$$V'_{ef} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{p_\varphi^2}{m\rho_0^3} = mga\, e^{\rho_0}} \leftarrow$$ non ten solución analítica.

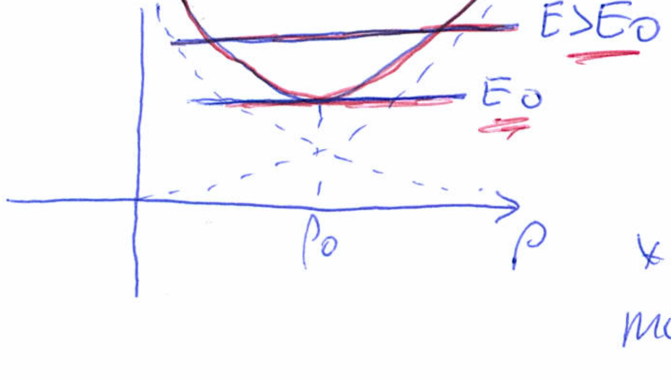
$$V''_{ef} = \frac{3p_\varphi^2}{m\rho^4} + mga\, e^\rho > 0 \Rightarrow$$ en ρ_0 hai un mínimo de enerxía potencial.

Caso $p_\varphi = 0 \Rightarrow V_{ef} = mga\left(e^\rho - 1\right)$



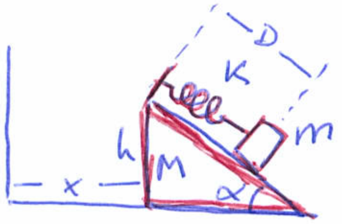
A partícula acaba sempre caendo a $\rho = 0$ $(z = 0)$.

Caso $p_\varphi \neq 0$



* Para $E_0 = V_{ef}^{min} = V_{ef}(\rho_0)$ a partícula describe unha órbita circular ($\rho = \rho_0$ constante) estable ($z = z_0$ constante).
* Para $E > E_0$ a partícula móvese entre un ρ_{max} e un ρ_{min}

3



$$\left.\begin{array}{l} x_M = x \quad , \quad y_M = 0 \\ x_m = x + D\cos\alpha \ , \ y_m = h - D\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}_M = \dot{x} \quad , \quad \dot{y}_M = 0 \\ \dot{x}_m = \dot{x} + \dot{D}\cos\alpha \ , \ \dot{y}_m = -\dot{D}\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_M^2 = \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 = \dot{x}^2 \\ v_m^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = (\dot{x} + \dot{D}\cos\alpha)^2 + \dot{D}^2\,\text{sen}^2\alpha = \\ \quad = \dot{x}^2 + \dot{D}^2\cos^2\alpha + 2\dot{x}\dot{D}\cos\alpha + \dot{D}^2\,\text{sen}^2\alpha \\ \quad = \dot{x}^2 + \dot{D}^2 + 2\cos\alpha\,\dot{x}\dot{D} \end{array}\right\}$$

a) $$T = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 = \boxed{\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{D}^2 + \frac{1}{2} m\, 2\cos\alpha\,\dot{x}\dot{D}}$$

$$V = V_m + \underbrace{V_M}_{0} = \boxed{mg(h - D\,\text{sen}\,\alpha) + \frac{1}{2}K(D-\ell)^2}$$

lonxitude do resorte en equilibrio.

b) $$\boxed{m_{jk} = \begin{pmatrix} M+m & m\cos\alpha \\ m\cos\alpha & m \end{pmatrix}}$$

$$A_{jk} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right|_{eq.} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{eq} & \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial D}\right|_{eq} \\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial D \partial x}\right|_{eq} & \left.\frac{\partial^2 V}{\partial D^2}\right|_{eq} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}}$$

Matriz da Ecuación secular: $A - m\omega^2 = \begin{pmatrix} -(M+m)\omega^2 & -m\cos\alpha\,\omega^2 \\ -m\cos\alpha\,\omega^2 & K - m\omega^2 \end{pmatrix}$

a) Ecuación secular:

$(A - m\omega^2)\vec{a} = 0$ ten solución distinta de $\vec{a}=0$ se:

$$\det(A - m\omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow -(M+m)\omega^2(K - m\omega^2) - m^2\cos^2\alpha\,\omega^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2\left[(M+m)(K-m\omega^2) + m^2\cos^2\alpha\,\omega^2\right] = 0$$

Ten dúas solucións:

* $\boxed{\omega_1 = 0}$ modo de frecuencia cero (non vibra).

* $(M+m)(K-m\omega^2) + m^2\cos^2\alpha\,\omega^2 = 0.$

$$\Rightarrow m^2\cos^2\alpha\,\omega^2 = -(M+m)(K-m\omega^2)$$

$$\Rightarrow m^2\cos^2\alpha\,\omega^2 - (M+m)m\omega^2 = -(M+m)K$$

$$\Rightarrow m\left(1 - \frac{m\cos^2\alpha}{M+m}\right)\omega^2 = K$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2^2 = \frac{K}{m}\,\frac{M+m}{M+m\,\mathrm{sen}^2\alpha}}$$

b) Caso $\alpha = 0$ $\longrightarrow$ 

$$\omega_2^2 = \frac{K}{m}\,\frac{M+m}{M} = \frac{K}{\frac{mM}{M+m}} = \frac{K}{\mu}\,; \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{\mu}}}$$

$\frac{mM}{M+m} \leftarrow$ masa reducida

* Determinemos a relación entre amplitudes do modo $\boxed{\omega_2 = \sqrt{K/\mu}}$.

$$(A - m\omega^2)\vec{a} = \begin{pmatrix} -(M+m)\omega^2 & -m\omega^2 \\ -m\omega^2 & K - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(M+m)\omega^2 a_1 - m\omega^2 a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{M+m}{m}a_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -\frac{M+m}{m}a_1 \end{pmatrix}}$$

Para o modo $\boxed{\omega_1=0}$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow b_2=0 \Rightarrow \boxed{\vec{b}\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}}$$

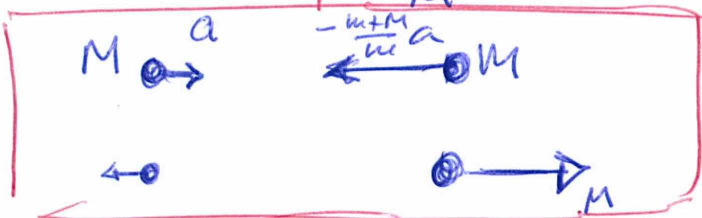
Solución:

habería que incluír un termo ct para ter en conta o movemento traslacional

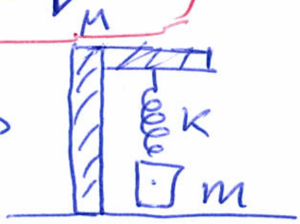
$$\left.\begin{aligned} X &= b + a\cos(\omega_2 t) \\ D &= 0 - \frac{M+m}{m}a\cos(\omega_2 t). \end{aligned}\right\}$$

* O modo $\omega=0$ non vibra pero o sistema podería moverse con v constante dependendo da condición inicial.

* O modo $\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$ vibraría con amplitude relativa $\boxed{\frac{a_m}{a_M} = -\frac{m+M}{m}}$



e) Caso $\alpha=\frac{\pi}{2}$. $\longrightarrow$



O sistema está desacoplado:

$$m=\begin{pmatrix}M+m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&k\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2=\frac{k}{m}}$$

4

$$\omega^2 = v^2 k^2 (1 + s L^2 k^2) \qquad v,\ s,\ L \text{ constantes}$$

a) $$\boxed{v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{v^2 k^2 (1+sL^2k^2)}}{k} = v\sqrt{1+sL^2k^2}}$$ Velocidade de fase

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\sqrt{v^2k^2(1+sL^2k^2)}\right) = \frac{d}{dk}\left(vk\sqrt{1+sL^2k^2}\right)$$

$$= v\sqrt{1+sL^2k^2} + vk\,\frac{\cancel{2}sL^2k}{\cancel{2}\sqrt{1+sL^2k^2}} = v\left(\sqrt{1+sL^2k^2} + \frac{sL^2k^2}{\sqrt{1+sL^2k^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = v\,\frac{1+2sL^2k^2}{\sqrt{1+sL^2k^2}}}$$ velocidade de grupo.

b) Casos

$s = 0 \Rightarrow \underset{\omega/k}{v_f} = \overset{\text{cte}}{v}, \quad v_g = v \Rightarrow \boxed{v_f = v_g}$ Medio non dispersivo

($\omega = vk$ lineal!)

$s \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\overset{v_g(k)}{v_g}}{v_f} = \dfrac{\cancel{v}\,\dfrac{1+2sL^2k^2}{\sqrt{1+sL^2k^2}}}{\cancel{v}\sqrt{1+sL^2k^2}} = \dfrac{1+2sL^2k^2}{1+sL^2k^2}$

$s > 0 \Rightarrow v_g > v_f$ dispersión anómala

$s < 0 \Rightarrow v_g < v_f$ dispersión normal.

c) Da relación de dispersión, tomando $\boxed{s}$ adimensional

$\Rightarrow L^2 \underset{\uparrow 2\pi/\lambda}{k^2}$ adimensional $\Rightarrow [L] = [\lambda] = L$ dimensión de lonxitudes.

Se $Lk \ll 1 \Rightarrow v_g \simeq v_f$ e o medio é non dispersivo

$(L \ll \lambda)$

$\Rightarrow$ hai dispersión só para $\boxed{\lambda \lesssim L}$ (lonxitudes de onda menores que L)